x	l_x	d_x
30	10000	200
31	9800	400
32	9400	600
33	8800	800
34	8000	1000
35	7000	1200
36	5800	1400
37	4400	1600
38	2800	1800
39	1000	1000
40	0	0

Tabelle 1: "Steinzeitsterbetafel" aus H. Kracke *Lebensversicherungsmathematik*, l_x ist die Anzahl der Lebenden mit Alter x, $d_x = l_x q_x$

Das Deckungskapital

1 Geben Sie die Entwicklung des Nettodeckungskapitals einer 6-jährigen gemischten Versicherung mit Nennwert 2500 € einer 32-jährigen Person bei jährlicher Prämienzahlung tabellarisch an (vgl. Beispiel 3 aus Kapitel 1.6.1). Der Zinssatz sei dabei $i = 0.04$ und die Sterbewahrscheinlichkeiten durch die "Steinzeitsterbetafel" gegeben.

2 Es sei $q_{31} = 0.002$, $\ddot{a}_{32:\overline{13}|} = 9$ und $i = 0.05$. Gesucht ist ${}_1V_{31:\overline{14}|}$.

3 Es sei ${}_{10}V_{25} = 0.1$ und ${}_{10}V_{35} = 0.2$. Berechnen Sie ${}_{20}V_{25}$.

4 Für eine lebenslängliche Todesfallversicherung über 1500 Geldeinheiten mit konstanten jährlichen Prämien auf ein Leben von x Jahren sei das Deckungskapital nach Jahr $h-1$ 179, nach Jahr h betrage es 205. Weiters sei $i = 0.05$ und $\ddot{a}_x = 16.2$. Berechnen Sie q_{x+h-1}.

5 Eine 5-jährige gemischte Versicherung mit Nennwert 10000 € wird an eine 32-jährige Person ausgestellt. Die Kosten für diese Versicherung werden durch 4 jährliche vorschüssige Prämien gedeckt. Nun will diese Person die Versicherung am Ende des 3. Jahres (vor Bezahlung der 4. Prämie) in eine lebenslange vorschüssige Rente umwandeln. Wie groß sind unter der Annahme $i = 0.04$ und mit auf Grundlage der "Steinzeitsterbetafel" die jährlichen Rentenzahlungen?

6 Eine 6-jährige Erlebensfallversicherung mit Nennwert 10000 € wird an eine 30-jährige Person ausgestellt. Die Kosten für diese Versicherung werden durch jährliche vorschüssige Prämien gedeckt. Nun will diese Person am Ende des 3. Jahres prämienfrei gestellt werden und die Versicherung in eine lebenslange vorschüssige Rente beginnend ab dem 35. Lebensjahr umwandeln. Wie groß sind unter der Annahme $i = 0.04$ und mit auf Grundlage der "Steinzeitsterbetafel" die jährlichen Rentenzahlungen?

7 Stellen Sie die Entwicklung des ausreichenden Deckungskapitals für eine Ablebensversicherung mit Nennwert 1000 € einer 35-jährigen Person gemäß der "Steinzeitsterbetafel" mit $i = 0.04$. Nehmen Sie dabei an, dass die Versicherung folgende Kosten veranschlagt: 5% Abschlusskosten, 3% Inkassokosten und 10% Verwaltungskosten. Geben Sie außerdem jeweils Nettodeckungskapital, ${}_kV^\alpha$ und die Verwaltungskostenreserve an.

Risikomodelle

8 Eine Feuerversicherungsgesellschaft versichert 160 Gebäude gegen Feuerschäden für folgende Versicherungssummen:

Versicherungssumme	Anzahl der Verträge
10000	80
20000	35
30000	25
50000	15
100000	5

Die Wahrscheinlichkeit für einen Feuerschaden für jedes der Gebäude pro Jahr sei gleich 0.04 und $\mathbb{P}$(mehr als ein Schaden pro Gebäude)=0; weiters seien die Feuerschäden unabhängige Ereignisse. Die bedingte Verteilung der Schadenshöhe, gegeben dass ein Schaden aufgetreten ist, sei gleichverteilt im Intervall von 0 bis zur versicherten Schadenssumme. Sei N die Anzahl der Schäden und S die Gesamtschadenshöhe in einem Jahr.
a) Man berechne Erwartungswert und Varianz von N.
b) Man berechne Erwartungswert und Varianz von S.
c) Welcher relative Sicherheitszuschlag θ ist nötig, damit die Gesellschaft einen Gesamtprämienbetrag einnimmt, der gleich dem 99%-Quantil der Gesamtschadensverteilung ist? (Man verwende die Normalapproximation)

9 Die Schadensanzahl N in einem Portfolio habe eine geometrische Verteilung, d.h.

$$\mathbb{P}(N = n) = pq^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

mit $0 < q < 1$ und $p = 1 - q$. Man bestimme $M_S(t)$
a) allgemein
b) für exponentialverteilte Schadenshöhen.

10 Berechne die Schiefe von S im zusammengesetzten Binomialmodell, zuerst allgemein und dann für deterministische Schadenshöhen y_0.

11 Die Zufallsvariable S habe eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit $\lambda = 2$ und $\mathbb{P}(X_i = x) = 0.1x,\ x = 1, 2, 3, 4$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für $S = 0, 1, 2, 3, 4$?

12 Man zeige, dass die Familie der negativ-binomialverteilten Verteilungen mit Parametern r und p für $r \to \infty$ und $p \to 1$ (wobei $r(1-p) = \lambda$ konstant bleibt) gegen eine Poissonverteilung mit Parameter λ konvergiert.

13 S_1 sei zusammengesetzt Poisson-verteilt mit $\lambda_1 = 2$ und Schadenshöhen 1,2 oder 3 mit Wahrscheinlichkeiten $0.2, 0.6$ bzw. 0.2. Sei weiters S_2 sei zusammengesetzt Poisson-verteilt mit $\lambda_2 = 6$ und Schadenshöhen 3 oder 4 mit Wahrscheinlichkeit jeweils 0.5. Bestimme die Verteilung von $S_1 + S_2$, falls S_1 und S_2 unabhängig sind!

14 Man beweise folgende Behauptung: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$r^k e^{\frac{r^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ru}(-1)^k H_k(u)\phi(u)du$$