19. Weisen Sie den Integralsatz von Gauß für das Kurvenintegral

$$\oint_C (x^2 - y^2)\,dx + (x+y)\,dy$$

nach, wobei C die Berandung der Ellipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$$

bezeichnet.

20. Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y^2 \\ x - z^2 \end{pmatrix}$$

und die Fläche F mit

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ z \leq 1\}$$

21. Weisen Sie den Integralsatz von Gauß für das Oberflächenintegral

$$\oiint_{\mathcal{O}} x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$$

nach, wobei $\mathcal{O}$ die Berandung des Körpers

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z \leq 16, \quad z \geq 0\right\}$$

bezeichnet.

22. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie für alle $\mathbf{x} \in U$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{4\pi r^2} \oiint_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=r} f(\mathbf{y})\,do(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \right) = \frac{1}{12} \Delta f(\mathbf{x}).$$

Hinweis: ersetzen Sie f um $\mathbf{x}$ durch das Taylor-Polynom zweiter Ordnung.