14. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\oint_C 2xy\,dx + x^2\,dy + (1 + x - z)\,dz$$

längs der Schnittkurve $C$ der beiden Flächen $z = x^2 + y^2,\ 2x + 2y + z = 7$. Dabei werde die Kurve $C$ vom Ursprung aus gesehen im Uhrzeigersinn durchlaufen.

15. Überprüfen Sie die Integrabilitätsbedingungen für das Vektorfeld

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz - \cos(x - y) + \cos(x + y) - x\sin(x + y) - \sin(x + z) \\ xz + \cos(x - y) - x\sin(x + y) \\ xy + 2z - \sin(x + z) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $\mathbf{V}$ und berechnen Sie damit das Kurvenintegral

$$\int_{(0,0,0)}^{(\pi,-\pi,2\pi)} \mathbf{V}\,d\mathbf{x}.$$

16. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_{\mathcal{O}} (x^2 - xy)\,dy \wedge dz + (1 - 3y + z)\,dz \wedge dx + (\cancel{e^x} - xz)\,dx \wedge dy.$$

Dabei ist $\mathcal{O}$ die Oberfläche des Paraboloids $z = x^2 + y^2,\ z \leq 4$.

17. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\oiint_{\mathcal{O}} x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy,$$

wobei $\mathcal{O}$ die Berandung des Bereichs

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$$

bezeichnet.

18. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_{\mathcal{O}} y\,dy \wedge dz + z\,dz \wedge dx + x\,dx \wedge dy,$$

wobei die Fläche $\mathcal{O}$ durch

$$\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = x^2 - y^2\}$$

gegeben ist.